Traducción y Resumen (aunque no tanto), del texto de Allen Forte *The Structure of Atonal Music* (New Haven and London: Yale University Press, 1973)

Orden normal; la forma prima

Varias razones nos obligan a diferenciar grupos de clases de altura ordenadas de las no ordenadas. Si [0,2,3] se toma como lo mismo que [2,3,0], la diferencia en el orden no debe entenderse como dos grupos de clases de alturas diferentes. Son equivalentes por el simple hecho de contener los mismos elementos. Nos referimos a ellas como series no ordenadas. Si, por el contrario, las tomamos como dos grupos de clases de alturas diferentes en función de su ordenamiento, se denominan series ordenadas.

Para trabajar las relaciones de dos grupos de clases de alturas, es necesario ordenarlas, puntualmente, reducirlas a un grupo ordenado básico, denominado *orden normal*. El ordenamiento de una serie se denomina permutación, que depende de la cantidad de elementos de la serie. A este número que señala la cantidad de elementos de un grupo lo denominamos *número cardinal*. La cantidad de permutaciones se obtiene el "factorial" del cardinal: n!, que quiere decir, por ejemplo, para un grupo de tres elementos -cardinal 3-, la cantidad de permutaciones posibles es el resultado de 1x2x3=6 -o, lo que es lo mismo, 3!=6-. Sin embargo, para determinar el *orden normal* de un grupo de clases de alturas, sólo precisamos las *permutaciones circulares*. Dado un grupo en un orden determinado, la primera permutación circular se obtiene colocando el primer elemento al último -y así con el resto de las permutaciones-:

[a,b,c]

[b,c,a]

[c,a,b]

Así, la cantidad de permutaciones circulares que obtenemos es igual al número cardinal.

¿Cómo se obtiene el orden normal? El grupo debe estar en un orden numérico ascendente al principio y en cada permutación circular debe mantenerse el orden numérico ascendente. Para lograrlo, debemos sumar 12 al elemento que pasa del inicio del grupo al final. Por caso, si tenemos el pc set [1,3,0]:

A0	[0,1,3]	diferencia entre el primer y el último elemento	3
A1	[1,3,12]	diferencia entre el primer y el último elemento	11
A2	[3,12,13]	diferencia entre el primer y el último elemento	10

La *condición 1* para determinar el orden normal dice que éste será aquella permutación con la menor diferencia entre el primer y el último elementos. En nuestro ejemplo será A0.

A veces, la *condición 1* no funciona. La *condición 2* dice lo siguiente: si la diferencia entre el primer y el último elementos es la misma en dos permutaciones, se toma como orden normal a la permutación con la menor diferencia entre el primer y el segundo elementos; si sigue siendo igual dicha diferencia, se busca la permutación que tenga la menor diferencia entre el primer y el tercer elementos. Se sigue así hasta llegar a determinar una permutación como orden normal.

A0	[0,2,4,8]	diferencia entre el primer y el último elemento	8
A1	[2,4,8,12]	diferencia entre el primer y el último elemento	10
A2	[4,8,12,14]	diferencia entre el primer y el último elemento	10
A3	[8,12,14,16]	diferencia entre el primer y el último elemento	8

Por la condición 1, A0 y A3 pueden tomarse como orden normal; pero, por la condición 2, A0 se define como tal.

La forma de un grupo de clases de alturas que sea un orden normal y cuyo primer elemento sea la altura 0, se denomina *forma prima*. En el apéndice se presentan todas las formas primas.

Grupos de Clases de alturas equivalentes por transposición

Un aspecto central de la Set Theory es la posibilidad de comparar dos grupos de clases de alturas. Cuando estamos frente a dos pc set, nos preguntamos ¿son el mismo o se diferencian? Para responder la pregunta, necesitamos una definición: dos pc sets serán *equivalentes* sí y solo sí pueden reducirse a la misma forma prima por transposición o por inversión seguida de transposición.

Tomemos como ejemplo la figura 5. En primer lugar, debemos preguntarnos si es razonable comparar los dos grupos de clases de alturas teniendo en cuenta lo siguiente: en la partitura, se encuentran a cierta distancia una de la otra; el primer pc set es una línea melódica, mientras que el segundo es un acorde. Más allá de estas diferencias, nada nos impide compararlos: mientras puedan reducirse a un grupo de clases de altura del mismo cardinal no hay inconvenientes para compararlos.

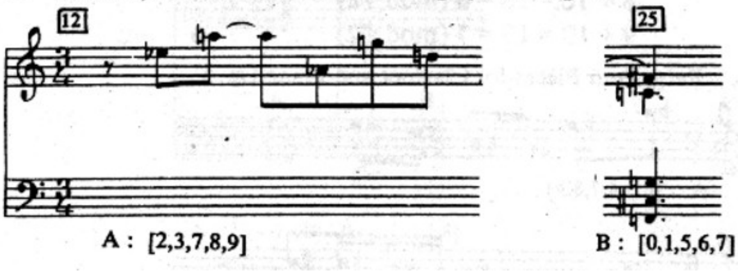
Para evitar los problemas de leer en una partitura, es mejor alinear los dos pc sets:

A: [2,3,7,8,9]

B: [0,1,5,6,7]

Para conocer a cuántos pasos se transpuso un pc set, debemos encontrar un número entero que, sumado a uno de los números enteros del pc set, nos dé como resultado el pc set transpuesto. En este caso, si sumamos 10 a cada entero del pc set A, obtenemos el pc

5. **Webern, Five Movements for String Quartet Op. 5/5**



set B. Si el resultado de esa suma es 12 ó más, se resta 12 al número obtenido, Forte denomina a este entero que se suma como *operador de transposición*, o simplemente t. Esto puede resumirse de la siguiente manera:

A	t		B
2 +	10 =	12 =	0
3 +	10 =	13 =	1
7 +	10 =	17 =	5
8 +	10 =	18 =	6
9 +	10 =	19 =	7

Grupos de Clases de alturas equivalentes por inversión

En lo anterior, hemos visto el proceso de transposición por el cual el pc set A produce un nuevo pc set equivalente B, si se suma un entero t a cada elemento de A.

	T t = 1	
A		B
0	→	1
1	→	2
2	→	3

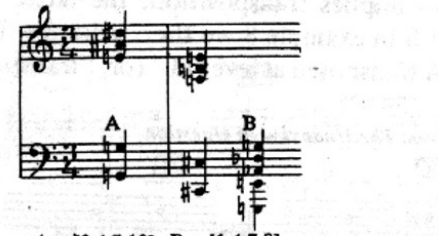
A cada elemento de A le corresponde un elemento de B. Y esa correspondencia es única en cada caso. Es decir, ningún elemento de B corresponde a dos elementos de A. Así, la transposición puede entenderse como una regla de correspondencia. Forte nos dice que el término preciso es *mapeado*: A está *mapeado* en B por la regla T. La razón es de índole descriptiva: es más económico y preciso que apelar a términos musicales convencionales. Y se vuelve mucho más útil cuando nos referimos a la inversión.

Como la transposición, la inversión también puede describirse en términos de la regla de correspondencia I (inversión), por el que mapea cada elemento del grupo A sobre un elemento del grupo B. El mapeo I depende de una correspondencia fija de clases de alturas:

	I	
0	↔	0
1	↔	11
2	↔	10
3	↔	9
4	↔	8
5	↔	7
6	↔	6

Para cualquier grupo A, el mapeo I envía todo elemento de A en su inversión, lo que resulta en un nuevo y equivalente grupo B. En cada caso, la suma de los dos enteros es 12.

8. Schoenberg, "George Lieder" Op. 15/6



A : [3,4,7,10] B : [1,4,7,8]

Unos párrafos atrás se dijo que dos pc set eran equivalentes si podían reducirse a la misma forma prima por inversión seguido por la transposición. La expresión *seguido por* se comprende fácilmente si pensamos en un doble mapeo.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & \mathrm{I} & & \mathrm{T} & \\
 & & & (t=1) & \\
A & & B & & C \\
0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 1 \\
1 & \longrightarrow & 11 & \longrightarrow & 0 \\
2 & \longrightarrow & 10 & \longrightarrow & 11
\end{array}
$$

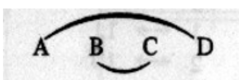
Al primer mapeo I le sigue el mapeo T. El resultado es que 0 en A va a 1 en C, 1 en A va a 0 en C, y 2 en A va a 11 en C. Un aspecto importante a tener en cuenta es que la transposición no implica una inversión previa; pero la inversión siempre implica una transposición a continuación, aún en el caso t = 0.

Veamos un ejemplo de Schoenberg. En el ejemplo 8, el grupo A está marcado como equivalente por inversión a B. El mapeo por el que B deriva de A es:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & \mathrm{I} & & \mathrm{T} & \\
 & & & (t=11) & \\
A & & & & C \\
3 & \longrightarrow & 9 & \longrightarrow & 8 \\
4 & \longrightarrow & 8 & \longrightarrow & 7 \\
7 & \longrightarrow & 5 & \longrightarrow & 4 \\
10 & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & 1
\end{array}
$$

Para conocer el operador de transposición, éste corresponde a la suma de A + C: 3 + 8 = 11; 4 + 7 = 11; etc. Por otro lado, en general, la inversión de un pc set en orden normal produce un pc set ordenado de manera descendente. Para comparar los pc set habrá que dar vuelta el orden del segundo pc set.

Veamos un ejemplo de Ives. Aunque la parte de la trompeta es la misma en los dos casos, las cuerdas realizan un acompañamiento diferente. Al examinar la equivalencia de los grupos, A es equivalente a D y B es equivalente a C, lo que aparea los grupos de la siguiente manera:



9. Ives, *The Unanswered Question*

Los intervalos de un PC set; el vector interválico

En esta sección se trata la interacción de los componentes de un pc set en términos de los intervalos que contiene. El ejemplo 12 provee un buen material para trabajar. Cada ejemplo es una versión del pc set 4-18. A, C y D son disposiciones melódicas. Los números que aparecen en corchetes son diferentes en cada caso. Esto se debe a que un ordenamiento lineal de un pc set determina una selección particular de los intervalos que conforman el *contenido interválico total.* Las tres disposiciones verticales, B, E y F presentan todos los intervalos del pc set.

El intervalo que se forma por dos enteros a y b es la diferencia a-b. Siempre debe tomarse la diferencia absoluta para evitar resultados negativos. Por ejemplo, 0-1 = 1. Si tomamos todos los intervalos que pueden formarse del total cromático, desechando los resultados que se duplican, tenemos doce intervalos diferentes. En la Set Theory, los intervalos relacionados por inversión se definen como equivalentes. De ese modo, sólo quedan 6 *clases de intervalos* si excluimos la relación entre 0 y 12.

$$0 \equiv 12$$

$$1 \equiv 11$$

$$2 \equiv 10$$

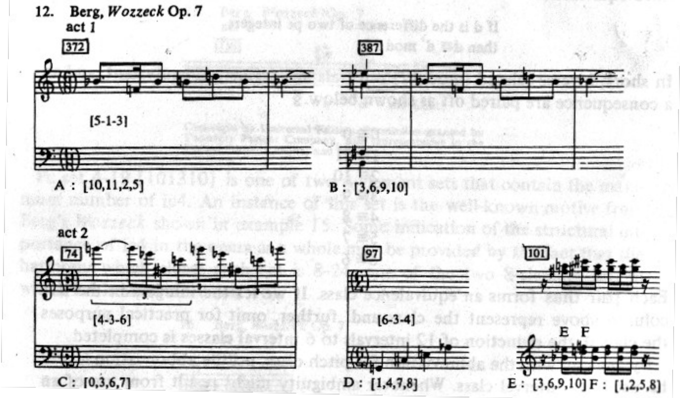
$$3 \equiv 9$$

$$4 \equiv 8$$

$$5 \equiv 7$$

$$6 \equiv 6$$

12. Berg, *Wozzeck* Op. 7



Cada par forma una clase de equivalencia. Si sacamos el cero, nos quedan seis clases de intervalos. La abreviatura para la clase de intervalos es *ic*. Con la noción de ic la descripción del contenido interválico total no es muy complicada. Básicamente, consiste en tomar pares de enteros no ordenados y se convierte a enteros del ic la diferencia entre cada par. Si tomamos los enteros de A del ejemplo 12:

[10,11,2,5]

10-11 = ic1

10-2 = ic4

10-5 = ic5

Para obtener el contenido interválico total tomamos el resto de los enteros:

11-2 = ic3

11-5 = ic6

2-5 = ic3

El resultado del contenido total interválico se denomina *vector interválico*. Este se obtiene de la siguiente manera. Se cuenta la cantidad de veces que aparece el ic 1; luego la cantidad de veces que aparece el ic 2; y así sucesivamente. Luego se coloca entre corchetes, siendo el primer entero las ocurrencias del ic1, el segundo entero la cantidad de ocurrencias de ic2; y así sucesivamente. Si tomamos el ejemplo anterior, el vector interválico será [102111]. En la posición del ic 2 tenemos 0 porque no tenemos ninguna ocurrencia del ic2; en la posición del ic3 tenemos 2 porque aparece dos veces, de la diferencia entre 11-2 y 2-5. El vector interválico es un conjunto ordenado, es decir, el primer número siempre corresponderá al ic 1 de cualquier pc set. Los vectores interválicos aparecen en la lista de formas primas.

Algunas propiedades de los vectores interválicos

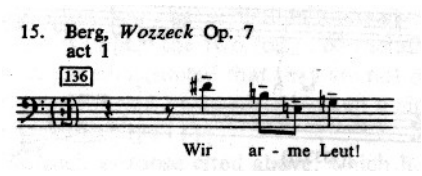
Aunque la totalidad de pc set está disponible para un compositor, éste sólo elige algunos de ellos. Pareciera que ciertos pc set tienen un rol prominente mientras que otros no. Podemos decir que los vectores tienen un papel estructural en estas decisiones, ya que se eligen ciertos pc set con determinadas características interválicas. Veremos tres propiedades de los vectores interválicos en pc set: *entradas únicas de vectores*, *número máximo de algunos ic;* e *idéntica o casi idéntica distribución de entradas.*

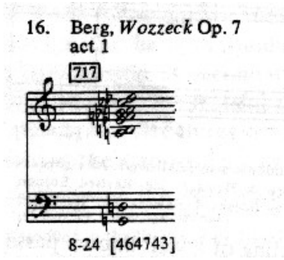
De los 220 pc set, solo 4 tienen vectores con entradas únicas

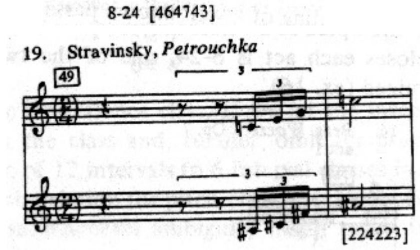
6-1	[543210]
6-32	[143250]
7-1	[654321]
7-35	[254361]

7-35 es la escala mayor, por lo que no vale la pena detenerse en demostrar por qué es interesante. Los pc set 6-1 y 7-1 son configuraciones "cromáticas". 6-32 se puede identificar en determinado ordenamiento como las primeras seis notas de la escala mayor.

Por otro lado, 6-1 y 7-1 cumplen con la propiedad del máximo número de ic: el ic 1 en este caso. Y 6-32 y 7-35 tienen esta propiedad para el ic 5. Otros cincuenta pc set tienen esta propiedad. Entre estos, hay algunos pc set que son prominentes en su uso. Por ejemplo, el pc set 4-19 [101310] es uno de los dos pc set de cuatro elementos que contienen el







mayor número de ic 4. Por ejemplo, lo vemos en Wozzeck (ejemplo 15).

Además, la ic 4 parece tener una importancia estructural en toda la ópera. El cierre de cada acto es con el pc set 8-24, uno de los dos pc set de ocho elementos con mayor número de ic 4 (ver ejemplo 16).

La tercera propiedad es la de idéntica o casi idéntica distribución de entrada de vectores. Sólo un pc set tiene una idéntica distribución de entradas: el pc set 4-z15 [111111]. El término *casi idéntica* se refiere a vectores interválicos con cuatro o más entradas idénticas. Sólo 29 pc set tienen esta propiedad. Veamos dos ejemplos.

En Schoenberg (ejemplo 18), el pc set 6-z10 [333321] es remarcado con insistencia en sus manuscritos. El conocidísimo ejemplo de Stravinsky (ejemplo 19) también cumple con la propiedad del máximo ic.

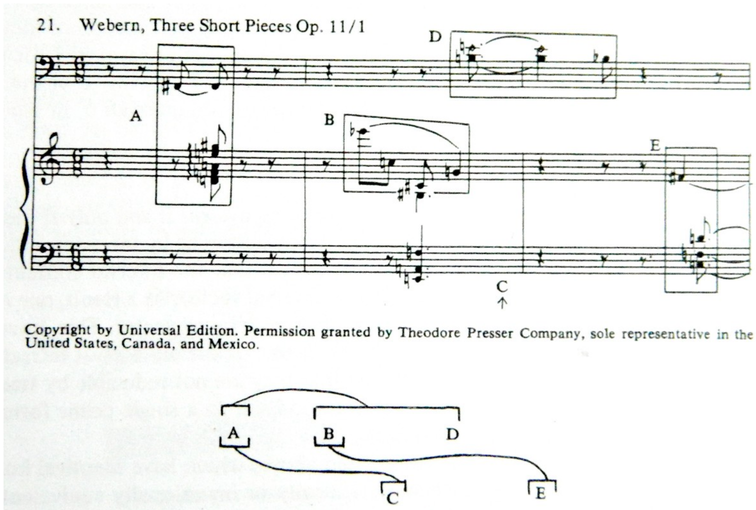
Pc sets no equivalentes con vector interválico idéntico

Ya hemos dicho que dos pc set son equivalentes sí y sólo sí son reducibles a la misma forma prima, por transposición o por inversión seguida de transposición. El contenido interválico de cada pc set se representa a través del vector interválico. Podría argumentarse que cada pc set tiene un vector interválico diferente. No obstante, esto no ocurre. Por ejemplo, los pc set 4-Z15 y 4-Z29 no pueden reducirse a una única forma prima, pero tienen el mismo vector interválico [111111]. Este tipo de pc set se denominan un par de relación Z[1]. Existen 19 pares de este tipo en total.

La pregunta que surge es la siguiente ¿es necesario o de alguna manera útil hacer esta distinción entre pares de pc sets con esta relación? Forte nos dice que a menos que se tome al vector interválico como un factor secundario, la relación se hace necesaria. Asimismo, nos dice que las relaciones estructurales que aparecen en el repertorio que aquí se estudia, es decir, la música atonal, convierten a la relación Z como necesaria.

El ejemplo 21 tomado del inicio del op 11/1 de Webern muestra dos pares de pc-sets en relación Z: 6-Z10/6-Z39 y 4-Z15/4-Z29. Los grupos de alturas correspondientes son los siguientes:

1 La "Z" no tiene mayor significado. Se trata tan sólo de un descriptor añadido al ordinal que sólo sirve para identificar a estos conjuntos de clases de alturas particulares.



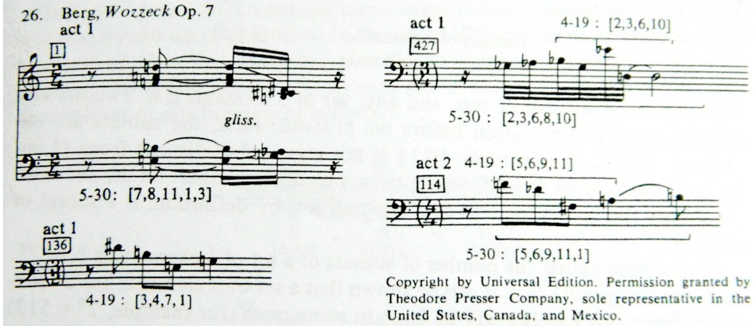
A	6-Z10: [2,4,5,6,8,9]
B	4-Z29: [0,1,3,7]
C	6-Z10: [4,5,7,8,9,e]
D	2-1: [t,e]
E	4-Z15: [0,2,5,6]

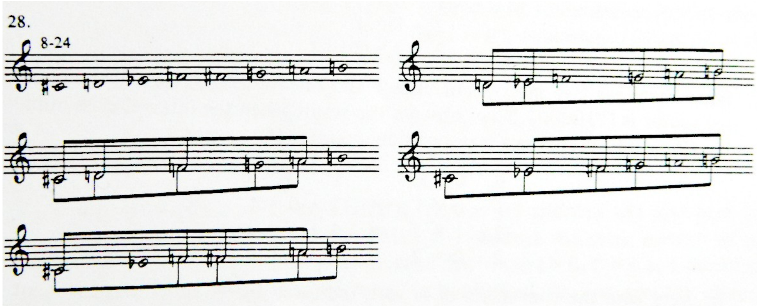
La correspondencia entre 6-Z10 y 6-Z29 se obtiene por la combinación de B y D. En virtud de la equivalencia interválica la configuración que se obtiene es el diagrama del ejemplo 21 a través de las uniones en un patrón interconectado.

En pocas palabras, la relación Z es importante para Forte porque se mantiene el contenido interválico de un par de conjunto de clases de alturas en ausencia de equivalencias por transposición o por inversión.

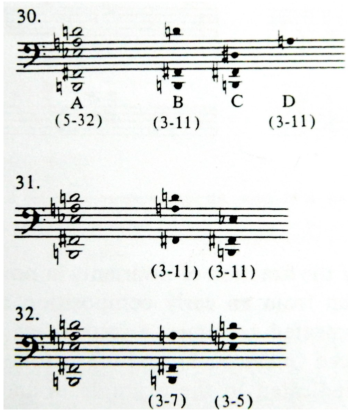
Los sub-grupos de un grupo de clases de alturas

El ejemplo 26 muestra cuatro fragmentos de *Wozzeck* que sirven para introducirnos a la noción de sub-grupos. El primero, tomado del inicio de la ópera, encontramos que el segundo acorde corresponde al pc-set 5-30; el segundo al pc-set 4-19; el tercero es una ampliación del segundo con el pc-set 5-30, aunque las últimas cuatro notas corresponden a 4-19; el último fragmento presenta al inicio 4-19 y, al añadir una nota, se transforma en 5-30. En estos fragmentos, vemos que 4-19 está contenido en 5-30; o que 4-19 es un sub-grupo de 5-30. O que 5-30 es un *super-grupo de 4-19*. A esta relación, Forte la llama *relación de inclusión*. La definición que nos brinda Forte es la siguiente: para dos pc-sets A y B, B es un sub-grupo de A sí y sólo sí todo elemento de B es un elemento de A. Y se escribe B $\subset$ A.





El ejemplo 28 muestra otros subgrupos del pc-set 8-24 *Wozzeck*, que como dijimos anteriormente, es un pc-set estructural de la ópera. Los pc-set 4-19, 5-30 y 6-34 corresponden a los motivos principales de la ópera. Estos tres pc-set aparecen contenidos 4 veces en 8-24, tal como se ve en el ejemplo 28. La noción de sub-grupos es importante para evitar nomenclaturas sobre las cuáles no se tienen mayores evidencias. Un ejemplo es el que aparece en la figura 30. El pc-set A -tomado del op. 2/3 de Berg- ha sido interpretado como la superposición simultánea de una tríada mayor y de una tríada menor, con el añadido de la séptima -sobre Si-. Pero nada nos dice que Berg haya construido así su acorde. La selección de los sub-grupos incluye otras consideraciones además de lo que nos parece familiar.

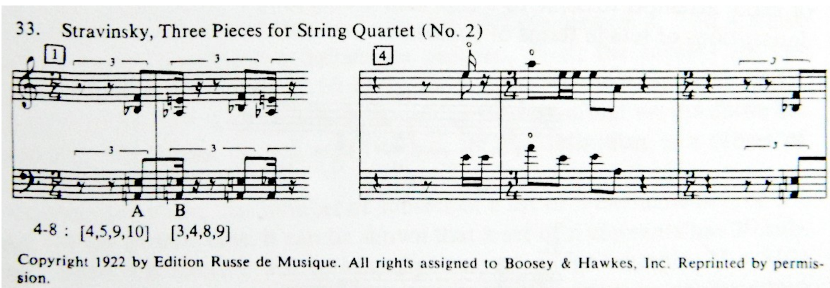


Sub-grupos invariantes por transposición

Dados dos pc-set A y B, un tercer conjunto C se determina por los elementos que aparecen en A y B. Este conjunto resultante se denomina *intersección de A y B*. Los elementos resultantes se denominan *clases de alturas invariantes.*

En el ejemplo 33, tenemos dos formas del pc-set 4-8, por transposición, que se repite seis veces. Los elementos de la nueva frase que aparece a continuación, con las clases de alturas [4,9], están incluídos en las dos transposiciones del pc-set 4-8, esto es, [4,5,9,t] y [3,4,8,9]. Para Forte, el sub-grupo invariante provee la continuidad estructural inmediata entre la presentación inicial y su reaparición en el c. 6.

Forte señala que la noción de conjuntos de clases de alturas invariantes está íntimamente asociada con las nociones musicales intuitivas de desarrollo, cambio, continuidad y



discontinuidad.

Existe un mecanismo sencillo para conocer la cantidad de clases de alturas invariantes entre dos pc-set del mismo cardinal, apelando al vector interválico. Si tenemos el pc-set [0,1,2] su vector interválico es [210000]. Si t es 1, nos da [1,2,3]; si t es 2 [2,3,4]; si t es 3 [3,4,5]. En el primer caso, hay dos clases de alturas invariantes [1,2]; en el segundo [2]; y en el tercero no aparece ninguna altura invariante. La cantidad de clases de alturas invariantes la obtenemos del vector interválico: el primer entero es 2, que nos indica la cantidad de clases de alturas invariantes de t=1; el segundo entero es 1, lo que nos da t=1; y el tercero es 0, t=3.

39. Stravinsky, *The Rite of Spring*

Veamos el ejemplo de la *Consagración de la Primavera* de Stravinsky en el ejemplo 39. Los dos pc-set A y B están en relación t=11. El sub-grupo invariante [2,5,9] permanece estático en blancas con punto, mientras los dos pc-set se alternan. Para Forte, aquí tenemos una fluctuación del contenido de las clases de alturas, mientras el contenido interválico permanece constante.